



Gilles Paquet

Méthodes d'analyse
appliquées à la modélisation des
mobiles manœuvrants

v.2 – mai 2026

SOMMAIRE

1. Nombres complexes	1
1.1 Définition des nombres complexes.....	1
1.2 Opérations sur les nombres complexes	1
2. Quaternions	2
2.1 Définition des quaternions.....	2
2.2 Opérations sur les quaternions.....	2
3. Espaces vectoriels.....	9
3.1 Espace vectoriel sur le corps des nombres réels.....	9
3.2 Espace vectoriel sur le corps des nombres complexes	9
4. Représentations spatiales	10
4.1 Représentation sur une droite	10
4.2 Représentation dans un plan orthonormé	10
4.3 Représentations dans un espace orthonormé à trois dimensions.....	13
4.4 Angles d'Euler.....	15
4.5 Angles de Tait-Byron	16
4.6 Difficulté relative à l'emploi des angles d'Euler ou de Tait-Byron	17
4.7 Les centrales inertielles et leurs cardans.....	17
5. Mouvement d'un mobile dans un plan.....	20
6. Mouvement d'un mobile dans l'espace à trois dimensions	23
6.1 Position du problème	23
6.2 Effet direct du roulis sur le trièdre de Serret-Frenet.....	25
6.3 Effet différentiel subi par l'orientation du trièdre de Serret-Frenet.....	26
6.4 Effet subi par l'origine du trièdre de Serret-Frenet	27
6.5 Bilan.....	27
6.6 Équation d'état.....	28
6.7 Simulation.....	29
6.8 Utilisations de l'équation d'état.....	29

Méthodes d'analyse appliquées à la modélisation des mobiles manœuvrants

Introduction

Ce petit fascicule vous propose quelques méthodes d'analyse mathématique appliquées aux positions et aux déplacements dans l'espace à une, deux ou trois dimensions. Ces outils d'analyse sont très utiles en physique et les ingénieurs se doivent de les connaître pour les utiliser de manière appropriée dans leurs modélisations.

1. Nombres complexes

En algèbre on distingue le *corps* \mathbb{R} des nombres réels et le *corps* \mathbb{C} des nombres complexes. La *structure de corps* permet d'effectuer deux opérations sur les nombres appartenant cette structure : l'*addition* et la *multiplication* ; cette structure suppose l'existence de *termes conjugués* et *inverses*.

Soit deux nombres *réels* x et y ; on peut calculer le nombre réel $z = x + y$; mais aussi les nombres réels suivants : $z = x - y$; $z = -x + y$; $z = x \cdot y$

Dans le cas où $y \neq 0$ on a : $z = x \div y$; et si $x = 1$ on a : $z = y^{-1}$

1.1 Définition des nombres complexes

Un nombre complexe $X(a, b)$ est constitué de deux variables réelles a et b associées au moyen d'un *terme imaginaire* i de la manière suivante : $X(a, b) = a + i \cdot b$; et, pour la multiplication, la règle suivante s'impose :

	1	\vec{i}
1	1	\vec{i}
i	i	-1

1.2 Opérations sur les nombres complexes

Soient deux nombres *complexes* $X_1(a_1, b_1)$ et $X_2(a_2, b_2)$; on peut donc calculer les nombres complexes suivants :

Addition de deux nombres complexes :

$$X(a, b) = X_1(a_1, b_1) + X_2(a_2, b_2) = (a_1 + a_2) + i \cdot (b_1 + b_2) = X_2(a_2, b_2) + X_1(a_1, b_1)$$

on observe que l'addition de deux nombres complexes est commutative.

Multiplication de deux nombres complexes :

$$\begin{aligned} X(a, b) &= X_1(a_1, b_1) \cdot X_2(a_2, b_2) = (a_1 + i \cdot b_1) \cdot (a_2 + i \cdot b_2) \\ &= a_1 a_2 - b_1 b_2 + i \cdot (a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2) \end{aligned}$$

on vérifie que la multiplication des nombres complexes est commutative :

$$a_1 a_2 - b_1 b_2 + i \cdot (a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2) = a_2 a_1 - b_2 b_1 + i \cdot (a_2 \cdot b_1 + b_2 \cdot a_1)$$

Conjugué d'un nombre complexe $X(a, b) = a + i \cdot b$:

$$\overline{X(a, b)} = \overline{a + i \cdot b} = a - i \cdot b$$

Norme d'un nombre complexe

La norme de X s'écrit : $\|X\| = \sqrt{X \cdot \overline{X}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

Inverse d'un nombre complexe $X(a, b) = a + i \cdot b$:

$$X(a, b)^{-1} = \frac{1}{a + i \cdot b} = \frac{a - i \cdot b}{a^2 + b^2} = \frac{\overline{X(a, b)}}{\|X\|^2}$$

2. Quaternions

En algèbre les *quaternions* appartiennent à l'ensemble de nombres dits hypercomplexes mais on se limite aux quaternions qui ont une grande utilité en sciences de l'ingénieur.

L'algèbre des quaternions a une structure de corps (représenté par la lettre \mathbb{H}) dans lequel la multiplication n'est pas commutative (alors qu'elle l'est dans le corps \mathbb{C} des complexes).

Les quaternions sont à l'espace tridimensionnel ce que les complexes sont dans le plan.

2.1 Définition des quaternions

Un quaternion $Q(q_0, q_1, q_2, q_3)$ est constitué de quatre variables réelles q_0, q_1, q_2, q_3 associées au moyen de trois *termes imaginaires* i, j et k de la manière suivante :

$$Q(q_0, q_1, q_2, q_3) = q_0 + q_1 \cdot i + q_2 \cdot j + q_3 \cdot k$$

On appelle "quaternion pur" un quaternion dont le terme réel est nul : $q_0 = 0$

Pour la multiplication, la règle suivante s'impose :

		1	i	j	k
	1	1	i	j	k
	i	i	-1	k	-j
	j	j	-k	-1	i
	k	k	j	-i	-1

2.2 Opérations sur les quaternions

La désignation des nombres réels q_0, q_1, q_2, q_3 est d'usage pour les quaternion mais elle est malaisée à utiliser pour décrire les opérations sur les quaternions ; nous avons donc privilégié – dans ce fascicule – la notation suivante :

$$Q(r, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = r + \mathbf{u} \cdot i + \mathbf{v} \cdot j + \mathbf{w} \cdot k$$

Addition de deux quaternions

$$[r_1 + \mathbf{u}_1 \cdot i + \mathbf{v}_1 \cdot j + \mathbf{w}_1 \cdot k] + [r_2 + \mathbf{u}_2 \cdot i + \mathbf{v}_2 \cdot j + \mathbf{w}_2 \cdot k] = \\ (r_1 + r_2) + (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \cdot i + (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \cdot j + (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) \cdot k$$

on observe que l'addition de deux quaternions est commutative.

Produit ordinaire de deux quaternions

$$[r_1 + \mathbf{u}_1 \cdot i + \mathbf{v}_1 \cdot j + \mathbf{w}_1 \cdot k] \cdot [r_2 + \mathbf{u}_2 \cdot i + \mathbf{v}_2 \cdot j + \mathbf{w}_2 \cdot k] = \\ (r_1 \cdot r_2 - \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 - \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2) \\ + (r_1 \cdot \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1 \cdot r_2 + \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{v}_2) \cdot i \\ + (r_1 \cdot \mathbf{v}_2 - \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{w}_2 + \mathbf{v}_1 \cdot r_2 + \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{u}_2) \cdot j \\ + (r_1 \cdot \mathbf{w}_2 + \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u}_2 + \mathbf{w}_1 \cdot r_2) \cdot k$$

la multiplication des quaternions est associative et distributive :

$$Q = Q_1 \cdot (Q_2 \cdot Q_3) = (Q_1 \cdot Q_2) \cdot Q_3$$

mais elle n'est pas commutative : $Q_1 \cdot Q_2 \neq Q_2 \cdot Q_1$

Conjugué d'un quaternion

si : $Q = r + \mathbf{u} \cdot i + \mathbf{v} \cdot j + \mathbf{w} \cdot k$

son conjugué s'écrit : $\bar{Q} = r - \mathbf{u} \cdot i - \mathbf{v} \cdot j - \mathbf{w} \cdot k$

on note que : $Q \cdot \bar{Q} = r^2 + \mathbf{u}^2 + \mathbf{v}^2 + \mathbf{w}^2$

Produit scalaire de deux quaternions

On sait que le produit scalaire de deux quaternions Q_1 et Q_2 s'écrit :

$$\text{Produit scalaire} = -\frac{1}{2}(Q_1 \cdot \bar{Q}_2 + Q_2 \cdot \bar{Q}_1) = \\ r_1 \cdot r_2 + \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2$$

on note que le résultat est un nombre réel.

Produit vectoriel de deux quaternions

On sait que le produit vectoriel de deux quaternions Q_1 et Q_2 s'écrit :

$$\text{Produit vectoriel} = -\frac{1}{2}(Q_1 \cdot \bar{Q}_2 - Q_2 \cdot \bar{Q}_1) =$$

$$(\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{v}_2 - \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v}_1) \cdot i + (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{w}_2 - \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{w}_1) \cdot j + (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u}_2 - \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1) \cdot k$$

on note que résultat n'a pas de partie réelle.

Norme d'un quaternion

La norme de Q s'écrit : $\|Q\| = \sqrt{Q \cdot \bar{Q}} = \sqrt{r^2 + \mathbf{u}^2 + \mathbf{v}^2 + \mathbf{w}^2}$

Inverse d'un quaternion

Tout quaternion $Q \neq 0$ a un inverse égal à :

$$Q^{-1} = \frac{\bar{Q}}{\|Q\|^2} = \frac{r - \mathbf{u} \cdot \mathbf{i} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{j} - \mathbf{w} \cdot \mathbf{k}}{r^2 + \mathbf{u}^2 + \mathbf{v}^2 + \mathbf{w}^2}$$

Représentation exponentielle des quaternions

Tout quaternion $Q \neq 0$ peut s'écrire sous la forme exponentielle suivante :

$$\frac{Q}{\|Q\|} = \exp^{\theta \omega}$$

où θ est un nombre réel et ω est le quaternion unitaire pur $\omega = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Cette représentation traduit bien le caractère "spinoriel" des quaternions.

Noter qu'on retrouve bien la formule d'Euler $-1 = e^{\pi i}$ en posant : $\theta = \pi$; $\omega = \mathbf{i}$ dès lors que le terme de gauche est convenablement normé.

Représentation matricielle des quaternions

Le corps \mathbb{H} des quaternions se scinde en deux corps \mathbb{C} des complexes qui se subdivisent eux-mêmes en deux corps \mathbb{R} des réels (on dit donc que le corps des quaternions est un espace de Banach) ; il s'en suit qu'un quaternion peut être décrit par une matrice 2×2 de nombres complexes ou par une matrice 4×4 de nombres réels. C'est la raison pour laquelle les quaternions peuvent faire l'objet d'une représentation matricielle constituée sur la base des matrices élémentaires suivantes :

$$\mathbf{1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{i} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{j} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{k} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

On s'assure que le produit vectoriel de \mathbf{i} par \mathbf{j} donne bien \mathbf{k} (la formule explicitant le produit vectoriel a été donnée précédemment ; bien faire attention aux signes).

Dans l'espace à trois dimensions, un vecteur peut être représenté par un quaternion, $Q(\mathbf{r}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = r + \mathbf{u} \cdot \mathbf{i} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{j} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{k}$ lequel peut être représentés par une matrice :

$$Q(\mathbf{r}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} r & -\mathbf{u} & -\mathbf{v} & -\mathbf{w} \\ \mathbf{u} & r & -\mathbf{w} & \mathbf{v} \\ \mathbf{v} & \mathbf{w} & r & -\mathbf{u} \\ \mathbf{w} & -\mathbf{v} & \mathbf{u} & r \end{vmatrix}$$

Le quaternion pur $\omega = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{j} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{k}$ est représenté par la matrice suivante ;

$$\omega(0, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} 0 & -\mathbf{a} & -\mathbf{b} & -\mathbf{c} \\ \mathbf{a} & 0 & -\mathbf{c} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b} & \mathbf{c} & 0 & -\mathbf{a} \\ \mathbf{c} & -\mathbf{b} & \mathbf{a} & 0 \end{vmatrix}$$

Le quaternion pur est dit unitaire si $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c} = 1$ et, dans ce cas, on a bien $\omega \cdot \omega^T = 1$

Conditions pour qu'un quaternion représente une rotation

Un quaternion Q peut représenter une rotation dans les conditions suivantes :

$$r = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$u = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos(\beta_x)$$

$$v = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos(\beta_y)$$

$$w = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos(\beta_z)$$

où α est un angle de rotation (exprimé en radians) et $\cos(\beta_x)$, $\cos(\beta_y)$ et $\cos(\beta_z)$ sont les “cosinus directeurs” des angles que forme l’axe de rotation avec les trois axes du trièdre affecté par la rotation. Pour bien comprendre comment fonctionnent les cosinus directeurs, observons ce qui se passe dans les cas suivants :

L’axe de rotation est ...			
(1) l’axe des x	(2) l’axe des y	(3) l’axe des z	(4) un axe entre x et y
$r = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$	$r = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$	$r = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$	$r = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$
$u = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot 1$	$u = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot 0$	$u = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot 0$	$u = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot 0,83666$
$v = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot 0$	$v = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot 1$	$v = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot 0$	$v = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot 0,54772$
$w = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot 0$	$w = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot 0$	$w = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot 1$	$w = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot 0$

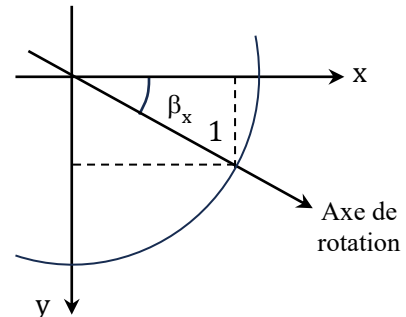
Dans le tableau ci-dessus, les quaternions des colonnes (1), (2) et (3) fournissent les cosinus directeurs de quatre rotations élémentaires :

La rotation (1) est une rotation autour de l’axe x ; son cosinus directeur u est donc égal à 1 alors que v et w sont nuls.

La rotation (2) est une rotation autour de l’axe y ; son cosinus directeur v est donc égal à 1 alors que u et w sont nuls.

La rotation (3) est une rotation autour de l’axe z ; son cosinus directeur w est donc égal à 1 alors que u et v sont nuls.

La rotation (4) est une rotation dont l’axe est situé dans le plan xy à 30° de l’axe x ; le cosinus directeur w égal à 0 alors que les valeurs de u et v dépendent de l’angle $\beta_x = 30^\circ$; on a donc $\cos(\beta_x) = 0,8366$ et $\cos(\beta_y) = 0,54772$; on vérifie que $\cos^2(\beta_x) + \cos^2(\beta_y) = 1$



La matrice orthogonale R (destinée à être multipliée la matrice colonne d'un vecteur) correspondant à la rotation d'un quaternion unitaire $\omega = u \cdot i + v \cdot j + w \cdot k$ dans le sens des aiguilles d'une montre est donnée par une expression hétérogène :

$$R = \begin{bmatrix} 1 - 2 \cdot (v^2 + w^2) & 2 \cdot (u \cdot v - r \cdot w) & 2 \cdot (u \cdot w + r \cdot v) \\ 2 \cdot (u \cdot v + r \cdot w) & 1 - 2 \cdot (u^2 + w^2) & 2 \cdot (v \cdot w - r \cdot u) \\ 2 \cdot (u \cdot w - r \cdot v) & 2 \cdot (v \cdot w + r \cdot u) & 1 - 2 \cdot (u^2 + v^2) \end{bmatrix}$$

ou par une expression homogène équivalente :

$$R = \begin{bmatrix} r^2 + u^2 - v^2 - w^2 & 2 \cdot (u \cdot v - r \cdot w) & 2 \cdot (u \cdot w + r \cdot v) \\ 2 \cdot (u \cdot v + r \cdot w) & r^2 + v^2 - u^2 - w^2 & 2 \cdot (v \cdot w - r \cdot u) \\ 2 \cdot (u \cdot w - r \cdot v) & 2 \cdot (v \cdot w + r \cdot u) & r^2 + w^2 - u^2 - v^2 \end{bmatrix}$$

Si le quaternion $\omega = u \cdot i + v \cdot j + w \cdot k$ n'est pas un quaternion unitaire, l'expression homogène reste cependant un multiple scalaire de la matrice de rotation alors que l'expression hétérogène n'est pas, dans ce cas, une matrice orthogonale. C'est la raison pour laquelle l'expression homogène est préférable pour qu'il n'y ait aucune distorsion dans la modélisation numérique.

Rappelons qu'une matrice carrée A ($n \times n$) à coefficients réels est orthogonale si et seulement si $A^T \cdot A = I_n$ où A^T est la transposée de A et I_n est la matrice unité dont la diagonale principale est constituée de 1 et dont tous les autres coefficients sont nuls. Une matrice orthogonale est inversible et son inverse est égal à sa transposée : $A^{-1} = A^T$.

La matrice des cosinus directeurs de la rotation du trièdre mobile xyz vers le trièdre fixe XYZ dans le sens des aiguilles d'une montre (sens rétrograde) correspondant à la succession des rotations élémentaires (1), (2) et (3) avec les angles respectifs suivants : ψ (psi) $\in [-\pi ; +\pi]$, θ (théta) $\in [0 ; +\pi]$, φ (phi) appelés angles d'Euler (peu importe le choix des lettres grecques qui les représentent pourvu qu'on ne fasse ni confusion ni supposition induite) ; la matrice des cosinus est donnée par :

$$R = R_{z(\psi)} \cdot R_{y(\theta)} \cdot R_{x(\varphi)}$$

avec :

$$R_{z(\psi)} = \begin{vmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$R_{y(\theta)} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{vmatrix}$$

$$R_{x(\varphi)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{vmatrix}$$

on obtient alors :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

et, tous calculs faits, l'expression de la matrice $R = R_z(\psi) \cdot R_y(\theta) \cdot R_x(\varphi)$ est la suivante :

$$\begin{pmatrix} \cos(\psi) \cdot \cos(\theta) & -\sin(\psi) \cdot \cos(\varphi) - \cos(\psi) \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi) & -\sin(\psi) \cdot \sin(\varphi) + \cos(\psi) \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) \\ \sin(\psi) \cdot \cos(\theta) & \cos(\psi) \cdot \cos(\varphi) - \sin(\psi) \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi) & -\cos(\psi) \cdot \sin(\varphi) + \sin(\psi) \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) \\ -\sin(\theta) & -\cos(\theta) \cdot \sin(\varphi) & \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Retrouver les paramètres d'une rotation à partir du quaternion qui la représente

La conversion d'un quaternion de rotation dans les angles d'Euler correspondants à cette rotation est possible si le quaternion est normalisé (on le normalise en le divisant par sa norme) ; dans ces conditions on calcule les angles d'Euler de la rotation exprimée par le quaternion normalisé au moyen des relations suivantes :

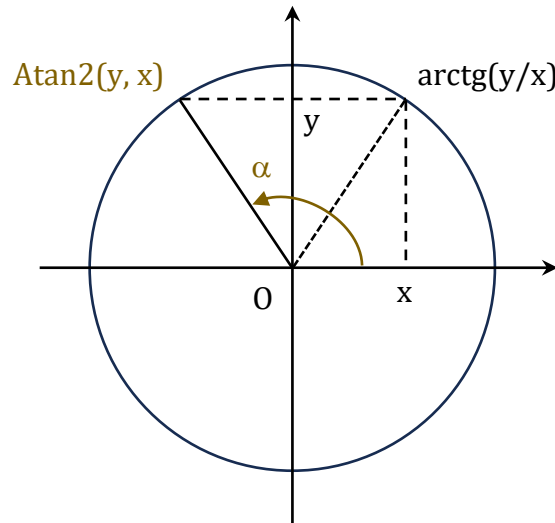
$$\begin{pmatrix} \psi \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Atan2}[2 \cdot (r \cdot w + u \cdot v), 1 - 2 \cdot (v^2 + w^2)] \\ -\frac{\pi}{2} + 2 \cdot \text{Atan2} \left[\sqrt{1 + 2 \cdot (r \cdot v - u \cdot w)}, \sqrt{1 - 2 \cdot (r \cdot v - u \cdot w)} \right] \\ \text{Atan2}[2 \cdot (r \cdot u + v \cdot w), 1 - 2 \cdot (u^2 + v^2)] \end{pmatrix}$$

On peut également calculer φ par la formule suivante :

$$\varphi = \arcsin[2 \cdot (r \cdot v - u \cdot w)]$$

Note

Dans le repère cartésien, la fonction $\alpha = \text{Atan2}(y, x)$ fournit la valeur de α en radians depuis l'axe des x jusqu'au rayon entre l'origine et le point de coordonnées (x, y) ; de même que $\text{Atan2}(y, x)$ est l'argument (ou angle de phase) du nombre complexe $x + i \cdot y$



La fonction Atan2 permet de fournir des orientations allant de $-\pi$ à $+\pi$ alors que la fonction classique arctg pose un problème pour $x = 0$ et ne donne que des résultats compris entre $-\pi/2$ et $+\pi/2$.

Évolution temporelle d'un quaternion

Il s'agit maintenant de déterminer le système d'équations différentielles qui prend en considération l'évolution d'un quaternion exprimé dans son repère :

$$Q(t) = r(t) + \mathbf{u}(t) \cdot i + \mathbf{v}(t) \cdot j + \mathbf{w}(t) \cdot k$$

qui s'écrit plus simplement : $Q = r + \mathbf{u} \cdot i + \mathbf{v} \cdot j + \mathbf{w} \cdot k$

en se rappelant que les réels r , \mathbf{u} , \mathbf{v} et \mathbf{w} sont des fonctions du temps.

La dérivée de Q par rapport au temps s'écrit :

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{dr(t)}{dt} + \frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} \cdot i + \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} \cdot j + \frac{d\mathbf{w}(t)}{dt} \cdot k$$

qui s'écrit plus simplement : $\dot{Q} = \dot{r} + \dot{\mathbf{u}} \cdot i + \dot{\mathbf{v}} \cdot j + \dot{\mathbf{w}} \cdot k$

Comme il est nécessaire de normaliser l'opération de dérivation, on écrit :

$$\frac{d}{dt} [Q(t) \cdot \overline{Q(t)}] = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{dQ(t)}{dt} \cdot \overline{Q(t)} + Q(t) \frac{d\overline{Q(t)}}{dt} \right]$$

qui s'écrit plus simplement :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [Q(t) \cdot \overline{Q(t)}] &= \frac{1}{2} (\dot{r} + \dot{\mathbf{u}} \cdot i + \dot{\mathbf{v}} \cdot j + \dot{\mathbf{w}} \cdot k) \cdot (r - \mathbf{u} \cdot i - \mathbf{v} \cdot j - \mathbf{w} \cdot k) \\ &\quad + \frac{1}{2} (r + \mathbf{u} \cdot i + \mathbf{v} \cdot j + \mathbf{w} \cdot k) \cdot (\dot{r} - \dot{\mathbf{u}} \cdot i - \dot{\mathbf{v}} \cdot j - \dot{\mathbf{w}} \cdot k) \end{aligned}$$

en effectuant toutes les opérations on trouve les termes de la matrice *orthogonale* qui effectue l'opération de dérivation :

$\dot{r} + \dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{w}}$	$-(\dot{\mathbf{u}}r - \dot{\mathbf{r}}\mathbf{u})$	$-(\dot{\mathbf{v}}r - \dot{\mathbf{r}}\mathbf{v})$	$-(\dot{\mathbf{w}}r - \dot{\mathbf{r}}\mathbf{w})$
$(\dot{\mathbf{u}}r - \dot{\mathbf{r}}\mathbf{u})$	$\dot{r} + \dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{w}}$	$-(\dot{\mathbf{w}}r - \dot{\mathbf{r}}\mathbf{w})$	$(\dot{\mathbf{v}}r - \dot{\mathbf{r}}\mathbf{v})$
$(\dot{\mathbf{v}}r - \dot{\mathbf{r}}\mathbf{v})$	$(\dot{\mathbf{w}}r - \dot{\mathbf{r}}\mathbf{w})$	$\dot{r} + \dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{w}}$	$-(\dot{\mathbf{u}}r - \dot{\mathbf{r}}\mathbf{u})$
$(\dot{\mathbf{w}}r - \dot{\mathbf{r}}\mathbf{w})$	$-(\dot{\mathbf{v}}r - \dot{\mathbf{r}}\mathbf{v})$	$(\dot{\mathbf{u}}r - \dot{\mathbf{r}}\mathbf{u})$	$\dot{r} + \dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{w}}$

La norme apparaît dans la diagonale principale ; la normalisation consiste à diviser tous les termes de cette matrice par cette norme.

Dans ces conditions on peut dire que la dérivation du quaternion se manifeste par une *rotation infinitésimale* autour d'un axe dont les cosinus directeurs \mathbf{a} , \mathbf{b} et \mathbf{c} sont les termes du quaternion pur ω ou de sa représentation matricielle (dont on a parlé page 4).

$$\omega(0, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} 0 & -\mathbf{a} & -\mathbf{b} & -\mathbf{c} \\ \mathbf{a} & 0 & -\mathbf{c} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b} & \mathbf{c} & 0 & -\mathbf{a} \\ \mathbf{c} & -\mathbf{b} & \mathbf{a} & 0 \end{vmatrix}$$

Il s'en suit que :

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \omega \cdot Q \iff \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} r(t) \\ u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -\mathbf{a} & -\mathbf{b} & -\mathbf{c} \\ \mathbf{a} & 0 & -\mathbf{c} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b} & \mathbf{c} & 0 & -\mathbf{a} \\ \mathbf{c} & -\mathbf{b} & \mathbf{a} & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} r(t) \\ u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{vmatrix}$$

On comprend comment exploiter ce résultat avec l'exemple traité à la page 26.

3. Espaces vectoriels

3.1 Espace vectoriel sur le corps des nombres réels

Un *espace vectoriel sur le corps* \mathbb{R} *des nombres réels* est un ensemble de vecteurs \vec{V} régis par :

- une loi de *composition interne* appelée *addition* ou *somme vectorielle* ; cette loi est *commutative* et *associative* :

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \quad \text{et} \quad (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) + \vec{V}_3 = \vec{V}_1 + (\vec{V}_2 + \vec{V}_3)$$

elle admet un *élément neutre* (appelé *vecteur nul*) : $\vec{V} + \vec{0} = \vec{V}$

tout vecteur \vec{V} a un *opposé* noté $-\vec{V}$ de sorte que $\vec{V} - \vec{V} = \vec{0}$

- une loi de *composition externe* appelée *multiplication par un scalaire* ayant les propriétés suivantes :

$$\lambda \cdot \vec{V} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \vec{V} = \vec{0}$$

$$1 \cdot \vec{V} = \vec{V}$$

$$\lambda \cdot (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = \lambda \cdot \vec{V}_1 + \lambda \cdot \vec{V}_2$$

$$(\lambda + \mu) \cdot \vec{V} = \lambda \cdot \vec{V} + \mu \cdot \vec{V}$$

$$(\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{V} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{V})$$

3.2 Espace vectoriel sur le corps des nombres complexes

Un *espace vectoriel sur le corps* \mathbb{C} *des nombres complexes* est un ensemble de vecteurs \vec{V} définis comme suit.

Soient a et b deux nombres réels ; un élément \vec{V} de l'espace vectoriel comprend une partie réelle a et une partie imaginaire $b \cdot \vec{i}$ où a et b sont deux nombres réels :

$$\vec{V} = a + b \cdot \vec{i}$$

L'élément \vec{V} est dit *réel* si sa partie imaginaire est nulle ; il est dit *imaginaire* si sa partie réelle est nulle.

Le *conjugué* d'un élément \vec{V} s'écrit : $\overline{\vec{V}} = a - b \cdot \vec{i}$

La *multiplication* est *associative* et *distributive* afin d'obtenir une algèbre que l'on peut normer en posant par exemple :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \overline{\vec{u}}}$$

Tout vecteur complexe \vec{V} non nul a un inverse égal à :

$$\vec{V}^{-1} = \frac{\overline{\vec{V}}}{\|\vec{V}\|^2} = \frac{\overline{\vec{V}}}{a^2 + b^2}$$

Le produit scalaire de deux vecteurs complexes \vec{V}_1 et \vec{V}_2 fournit un autre vecteur complexe donné par :

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = (a_1 + b_1 \cdot \vec{i}) \cdot (a_2 + b_2 \cdot \vec{i}) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \cdot \vec{i}$$

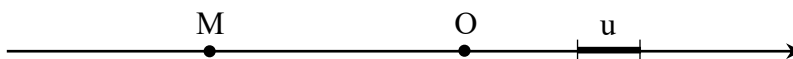
On observe que le produit de deux vecteurs complexes n'est pas commutatif :

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 \neq \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_1$$

4. Représentations spatiales

4.1 Représentation sur une droite

Pour représenter un point M sur une simple ligne droite, il nous faut placer sur cette droite une *origine* O , une *norme* u constituée par un segment de cette droite réputé unitaire et une *direction*; le point M peut alors être représenté par un nombre réel OM correspondant à sa distance à l'origine exprimée en nombre d'unités u positives ou négatives; sur la figure $OM = -3.u$:



La notation $M(t)$ indique que la position du point sur la droite dépend du temps; lorsque le point se déplace à la vitesse $V(t)$ cela s'exprime par la formule suivante:

$$\frac{dM(t)}{dt} = V(t)$$

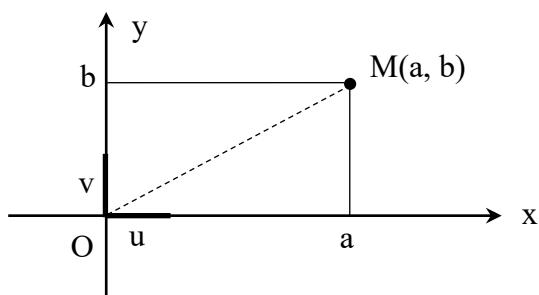
et lorsque le point subit une accélération longitudinale constante γ de sorte que:

$$\frac{d^2M(t)}{dt^2} = \frac{dV(t)}{dt} = \gamma$$
$$M(t) = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot t^2$$

4.2 Représentation dans un plan orthonormé

1) Représentation d'un point en coordonnées cartésiennes

Pour représenter un point M dans un plan il nous faut deux droites avec leur direction et leur norme propres mais une origine O commune; la droite Ox est appelée axe des *abscisses* et la droite Oy axe des *ordonnées*; Ox et Oy sont orthogonales (la seconde se déduisant de la première par une rotation de 90° dans le sens direct) et leurs normes u et v ont même longueur; on dispose alors d'un *repère orthonormé* appelé repère "cartésien"; dans un tel repère $M(a, b)$ désigne le point M avec ses coordonnées a et b ; on a alors; $OM^2 = a^2 + b^2$



Vous conviendrez aisément que les éléments du corps \mathbb{C} des nombres complexes (dont on a parlé au § 1) peuvent être représentés adéquatement dans le repère cartésien.

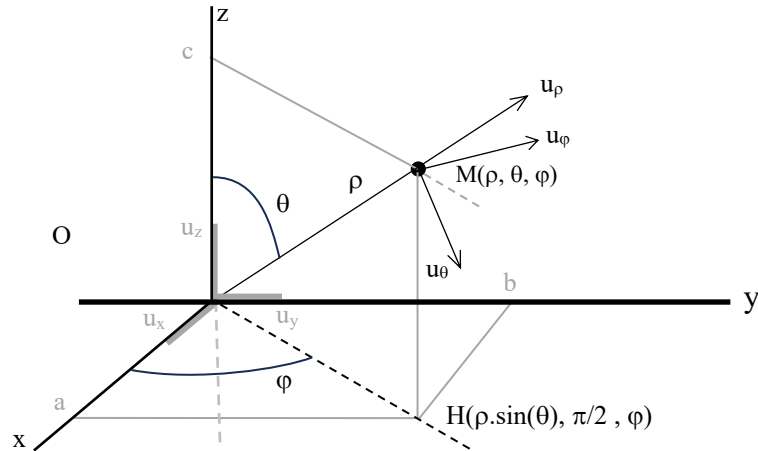
La notation $M(t)$ indique que la position du point sur la droite dépend du temps; lorsque le point se déplace à la vitesse $V(t)$ cela s'écrit en nombre complexe:

$$\frac{dM(t)}{dt} = V(t) = \left[\frac{da(t)}{dt} + i \frac{da(t)}{dt} \right]$$

et lorsque le point subit une accélération constante $\gamma(t)$ cela s'écrit en nombre complexe :

$$\frac{d^2M(t)}{dt^2} = \gamma(t) = \left[\frac{d^2a(t)}{dt^2} + i \frac{d^2a(t)}{dt^2} \right]$$

2) Représentation d'un point en coordonnées polaires



le passage des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes est donné par les formules :

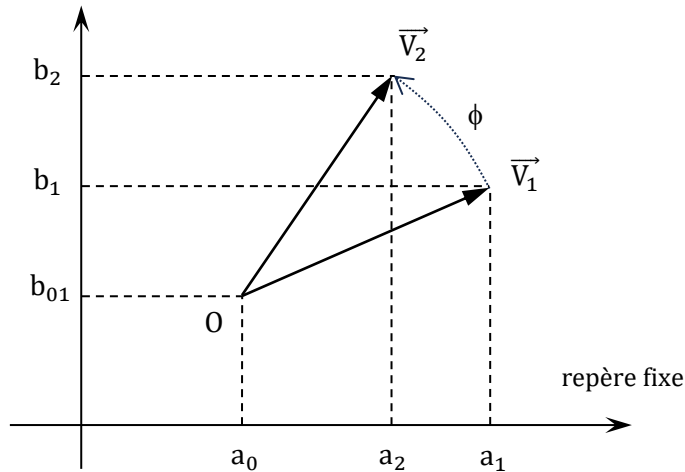
$$a = \rho \cdot \cos(\alpha) \quad \text{et} \quad b = \rho \cdot \sin(\alpha)$$

3) Représentation d'un vecteur et de sa rotation dans le plan

Nous voulons formaliser la rotation d'un vecteur \vec{V}_1 afin d'obtenir le vecteur \vec{V}_2 ; cette rotation s'effectue autour du point O avec un angle ϕ compté positif dans le sens direct :

$$\vec{V}_1 = (a_1 - a_0) + (b_1 - b_0) \cdot \vec{i}$$

$$\vec{V}_2 = (a_2 - a_0) + (b_2 - b_0) \cdot \vec{i}$$



\vec{V}_1 et \vec{V}_2 ont pour module V et pour arguments respectifs ϕ_1 et ϕ_2 ; on a donc :

$$V = \|\vec{V}_1\| = \|\vec{V}_2\|$$

Comme on sait que : $\phi_2 = \phi_1 + \phi$

les équation classiques de la trigonométrie nous donnent :

$$\cos(\phi_2) = \cos(\phi_1 + \phi) = \cos(\phi_1) \cdot \cos(\phi) - \sin(\phi_1) \cdot \sin(\phi)$$

$$\sin(\phi_2) = \sin(\phi_1 + \phi) = \sin(\phi_1) \cdot \cos(\phi) + \cos(\phi_1) \cdot \sin(\phi)$$

et la simple observation de la figure ci-dessus fournit :

$\cos(\phi_1) = \frac{(a_1 - a_0)}{V}$	$\cos(\phi_2) = \frac{(a_2 - a_0)}{V}$
$\sin(\phi_1) = \frac{(b_1 - b_0)}{V}$	$\sin(\phi_2) = \frac{(b_2 - b_0)}{V}$

Ces valeurs sont reportées dans les équation qui précèdent et, après simplification par V on trouve :

$$(a_2 - a_0) = (a_1 - a_0) \cdot \cos(\phi) - (b_1 - b_0) \sin(\phi)$$

$$(b_2 - b_0) = (a_1 - a_0) \cdot \sin(\phi) + (b_1 - b_0) \cdot \cos(\phi)$$

Les deux relations précédentes suffisent pour déterminer la rotation du vecteur de départ vers le vecteur d'arrivée ; le même mouvement de rotation peut être décrit sous une forme matricielle qui a l'avantage d'être plus condensée et très explicite :

avec des termes réels la relation matricielle s'écrit :

$$\begin{vmatrix} a_2 \\ b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 \\ b_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 - a_0 \\ b_1 - b_0 \end{vmatrix}$$

avec des termes complexes la même relation matricielle s'écrit :

$$\begin{vmatrix} a_2 \\ i \cdot b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 + (a_1 - a_0) \cdot \cos(\phi) - (b_1 - b_0) \cdot \sin(\phi) \\ i \cdot [b_0 + (a_1 - a_0) \cdot \sin(\phi) + (b_1 - b_0) \cdot \cos(\phi)] \end{vmatrix}$$

Et la même relation peut aussi s'exprimer sous la forme d'une simple équation de termes complexes :

$$a_2 + i \cdot b_2 = [a_0 + (a_1 - a_0) \cdot \cos(\phi) - (b_1 - b_0) \cdot \sin(\phi)] + i \cdot [b_0 + (a_1 - a_0) \cdot \sin(\phi) + (b_1 - b_0) \cdot \cos(\phi)]$$

Les expressions précédentes expriment toutes la même rotation dans un plan ; il faut toujours le garder à l'esprit tout en sachant que ces rotations s'effectuent autour d'un axe perpendiculaire au plan de la figure en un point donné (noté O sur la figure proposée ci-dessus).

Vérification par un exemple

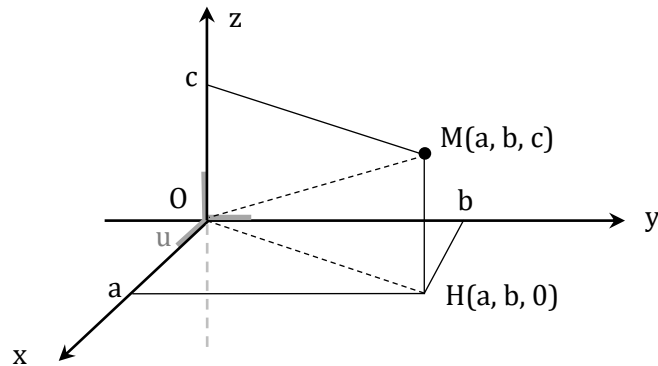
avec $a_0 = b_0 = 0$ et $\theta = \pi/2$ c'est-à-dire $\cos(\theta) = 0$ et $\sin(\theta) = 1$ on a :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_2 \\ b_2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_2 \\ i.b_2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1.\cos(\phi) + 0.\sin(\phi) \\ i.[1.\sin(\phi) + 0.\cos(\phi)] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ i \end{vmatrix} \\ &\text{soit } a_2 = 0 \text{ et } b_2 = 1 \end{aligned}$$

4.3 Représentations dans un espace orthonormé à trois dimensions

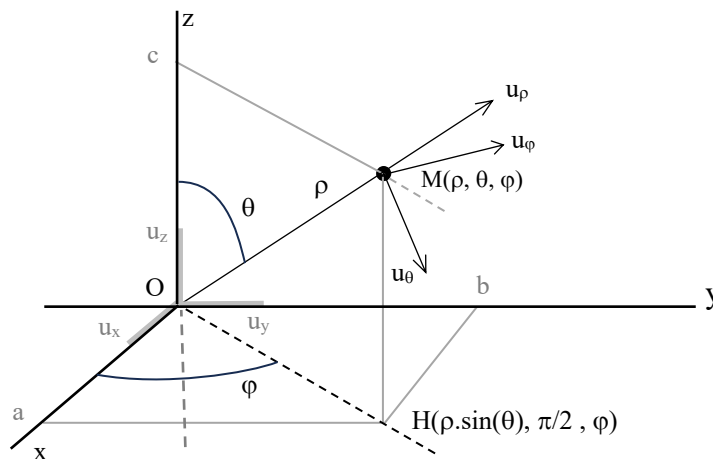
1) Représentation d'un point en coordonnées cartésiennes

Pour représenter un point M dans cet espace il nous faut trois droites avec leur direction et leur norme propres mais une origine O commune ; la droite Ox est appelée axe des *abscisses*, la droite Oy axe des *ordonnées* et la droite Oz axe des *hauteurs* ; Ox et Oy sont orthogonales (la seconde se déduisant de la première par une rotation de 90° dans le sens direct) et leurs normes u et v ont même longueur ; Oz est perpendiculaire au plan Oxy (elle est obtenue par un redressement dans le sens direct) ; on dispose alors d'un *repère orthonormé* appelé repère "cartésien" ; dans un tel repère $M(a, b, c)$ désigne le point M avec ses coordonnées a , b et c ; on a alors : $OM^2 = a^2 + b^2 + c^2$



2) Représentation d'un point en coordonnées sphériques

Le point $M(\rho, \theta, \varphi)$ est usuellement désigné par sa *distance radiale* ρ à l'origine, sa *colatitude* θ (comprise entre 0 et π) et sa *longitude* φ (comprise entre 0 et 2π) :

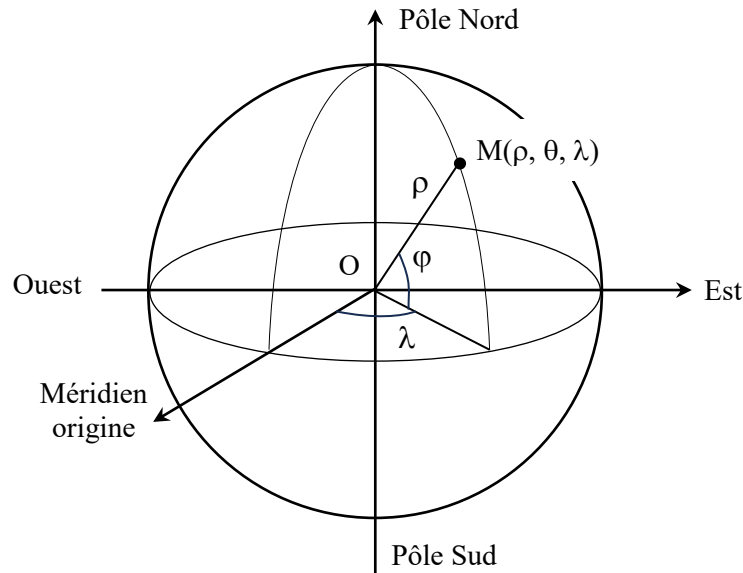


- les coordonnées cartésiennes (a, b, c) sont données par rapport à la *base fixe* (u_x, u_y, u_z) ; en revanche, les coordonnées polaires sont données par rapport à la *base locale* ($u_\rho, u_\theta, u_\varphi$) qui se déplace avec le point M.
- le passage des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes est donné par les formules :

$$a = \rho \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) ; b = \rho \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi) ; c = \rho \cdot \cos(\theta)$$

3) Représentation d'un point en coordonnées géographiques

Le point $M(\rho, \varphi, \lambda)$ est usuellement désigné par sa *distance radiale* ρ à l'origine, sa *latitude* φ (entre 0 et $\pi/2$, positive vers le nord et négative vers le sud) et sa λ (entre 0 et π , positive vers l'ouest et négative vers l'est) :



4) Représentation de l'attitude d'un trièdre mobile dans un trièdre fixe

Un corollaire du théorème d'Euler stipule que tout changement d'attitude d'un trièdre mobile dans un trièdre de référence supposé fixe se ramène à une rotation $\vec{\Omega}$ autour d'un axe Δ passant par un point fixe. Dans cette rotation les vecteurs unitaires du repère mobile deviennent les vecteurs unitaires du repère fixe, de sorte que :

$$\vec{T} \rightarrow \vec{i} , \vec{N} \rightarrow \vec{j} \text{ et } \vec{B} \rightarrow \vec{k}$$

La rotation $\vec{\Omega}$ d'angle du trièdre mobile \vec{T} , \vec{N} et \vec{B} peut être représentée par le quaternion de rotation $\Omega \in \mathbb{H}$ suivant :

$$\Omega = r + \mathbf{u} \cdot \mathbf{i} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{j} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{k}$$

Dans l'espace \mathbb{H} , \vec{T} , \vec{N} et \vec{B} sont alors représentés par leurs quaternions respectifs T, N et B exprimés dans le repère fixe :

$$\begin{aligned}
T &= \Omega \cdot i \cdot \bar{\Omega} = (r + \mathbf{u} \cdot i + \mathbf{v} \cdot j + \mathbf{w} \cdot k) \cdot i \cdot (r - \mathbf{u} \cdot i - \mathbf{v} \cdot j - \mathbf{w} \cdot k) \\
N &= \Omega \cdot j \cdot \bar{\Omega} = (r + \mathbf{u} \cdot i + \mathbf{v} \cdot j + \mathbf{w} \cdot k) \cdot j \cdot (r - \mathbf{u} \cdot i - \mathbf{v} \cdot j - \mathbf{w} \cdot k) \\
B &= \Omega \cdot k \cdot \bar{\Omega} = (r + \mathbf{u} \cdot i + \mathbf{v} \cdot j + \mathbf{w} \cdot k) \cdot k \cdot (r - \mathbf{u} \cdot i - \mathbf{v} \cdot j - \mathbf{w} \cdot k)
\end{aligned}$$

Le calcul des trois relations précédentes fournit les composantes des vecteurs unitaires \vec{T} , \vec{N} et \vec{B} du repère mobile dans le repère fixe, à savoir :

$T_x = r^2 + \mathbf{u}^2 - \mathbf{v}^2 - \mathbf{w}^2$	$N_x = 2 \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - r \cdot \mathbf{w})$	$B_x = 2 \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + r \cdot \mathbf{v})$
$T_y = 2 \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + r \cdot \mathbf{w})$	$N_y = r^2 + \mathbf{v}^2 - \mathbf{u}^2 - \mathbf{w}^2$	$B_y = 2 \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} - r \cdot \mathbf{u})$
$T_z = 2 \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} - r \cdot \mathbf{v})$	$N_z = 2 \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} + r \cdot \mathbf{u})$	$B_z = r^2 + \mathbf{w}^2 - \mathbf{u}^2 - \mathbf{v}^2$

On voit immédiatement qu'il est aisé d'exploiter ces résultats de façon matricielle.

En supposant que le repère fixe et le repère mobile ont la même origine, on passe d'un point M de coordonnées (x, y, z) dans le repère mobile au même point M de coordonnées (X, Y, Z) dans le repère fixe, par la relation suivante :

$$\begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r^2 + \mathbf{u}^2 - \mathbf{v}^2 - \mathbf{w}^2 & 2 \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - r \cdot \mathbf{w}) & 2 \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + r \cdot \mathbf{v}) \\ 2 \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + r \cdot \mathbf{w}) & r^2 + \mathbf{v}^2 - \mathbf{u}^2 - \mathbf{w}^2 & 2 \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} - r \cdot \mathbf{u}) \\ 2 \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} - r \cdot \mathbf{v}) & 2 \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} + r \cdot \mathbf{u}) & r^2 + \mathbf{w}^2 - \mathbf{u}^2 - \mathbf{v}^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$$

le passage d'un repère à l'autre est donc particulièrement aisé.

Remarque : la composition de deux rotations est également une rotation ce qui signifie que les rotations ont une structure de groupe dans l'espace tridimensionnel ; mais cette *structure de groupe n'est pas commutative*.

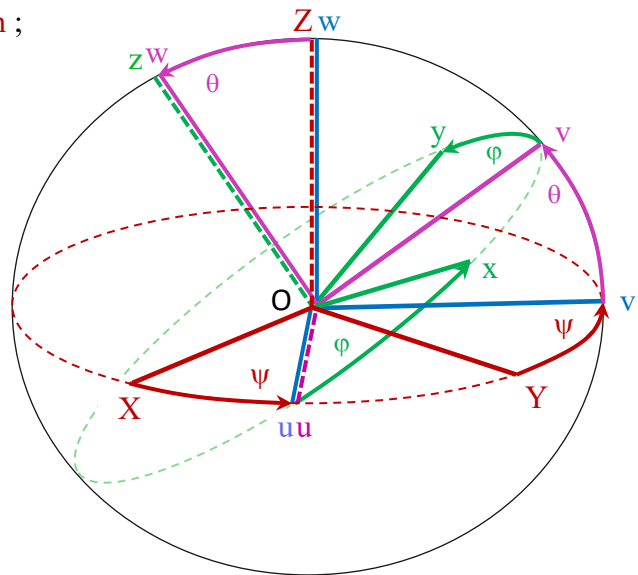
4.4 Angles d'Euler

Leonhard Euler (1707-1783) a introduit trois angles – appelés angles d'Euler – pour caractériser l'orientation d'un trièdre mobile par rapport à un trièdre cartésien de référence (supposé fixe) ; ces angles sont utilisés en astronomie planétaire :

la première rotation est appelée **précession** ;
notée ψ (psi), elle s'effectue autour de
l'axe OZ (confondu avec Ow) ;
OX devient Ou ; OY devient Ov ;

la seconde rotation est appelée **nutation** ;
notée θ (theta), elle s'effectue autour de
l'axe Ou (confondu avec Ou) ;
Ov devient Ov ; Ow devient Ow ;

la troisième rotation est appelée **rotation propre** notée ϕ (phi) ; elle s'effectue
autour de l'axe Ow (confondu avec Oz) ;
Ou devient Ox ; Ov devient Oy ;



Pour trouver le quaternion représentant la rotation globale correspondant à ces trois rotations élémentaires, il suffit d'appliquer la méthode explicitée plus haut (voir page 6) en tenant compte du fait que les sens de rotation diffèrent.

La matrice des cosinus directeurs de la rotation du trièdre XYZ vers le trièdre xyz dans le sens direct (et pas dans le sens des aiguilles d'une montre) correspond à la succession des rotations élémentaires (1), (2) et (3) avec les angles respectifs suivants : ψ , θ , φ (peu importe le choix des lettres grecques qui les représentent pourvu qu'on ne fasse ni confusion ni supposition induite) ; la matrice R des cosinus est alors donnée par :

$$R = R_{1(\psi)} \cdot R_{2(\theta)} \cdot R_{3(\varphi)}$$

avec :

$$R_{1(\psi)} = \begin{vmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$R_{2(\theta)} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{vmatrix}$$

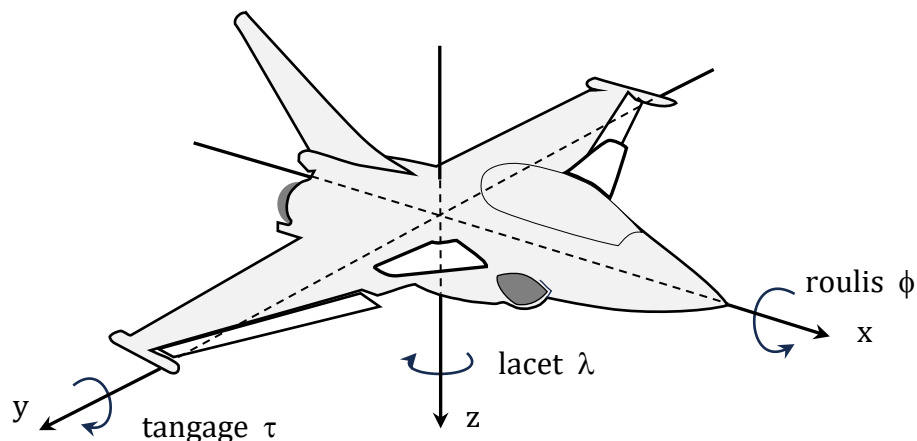
$$R_{3(\varphi)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ 0 & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{vmatrix}$$

Vous aurez noté que les signes des sinus diffèrent de ceux de la page 6 puisque le sens des rotations est ici le sens direct. On obtient alors :

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ 0 & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix}$$

4.5 Angles de Tait-Byron

Les angles de Tait-Byron sont une alternative aux angles d'Euler mais ils sont mieux adaptés aux exigences des modélisations dynamiques et cinématiques utilisées en aéronautique.



Les axes du repère de Tait-Byron sont orthogonaux deux à deux : l'axe x est l'axe principal de l'aéronef orienté dans le sens de sa marche ; l'axe latéral y est orienté vers la droite et, pour que le trièdre soit direct, l'axe z est orienté vers le bas ; dans ces conditions, le roulis

ϕ (*roll* ou *bank* en anglais) est positif lorsque l'aéronef penche sur sa droite sans changer de trajectoire ; le tangage τ (*pitch* en anglais) est positif lorsque sa trajectoire s'infléchit vers le bas ("l'aéronef pique du nez") ; le lacet λ (*heading* en anglais) est positif lorsque sa trajectoire s'infléchit vers la droite.

La matrice des cosinus directeurs de la rotation du trièdre xyz vers le trièdre XYZ dans le *sens direct* correspond à la succession des rotations élémentaires (1), (2) et (3) avec les angles respectifs suivants : λ , τ , ϕ ; cette matrice a la même forme que celle donnée au paragraphe 4.4 précédent :

$$R = R_{1(\lambda)} \cdot R_{2(\tau)} \cdot R_{3(\phi)}$$

avec :

$$R_{1(\lambda)} = \begin{vmatrix} \cos(\lambda) & \sin(\lambda) & 0 \\ -\sin(\lambda) & \cos(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$R_{2(\tau)} = \begin{vmatrix} \cos(\tau) & 0 & -\sin(\tau) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\tau) & 0 & \cos(\tau) \end{vmatrix}$$

$$R_{3(\phi)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{vmatrix}$$

On obtient alors :

$$\begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\lambda) & \sin(\lambda) & 0 \\ -\sin(\lambda) & \cos(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos(\tau) & 0 & -\sin(\tau) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\tau) & 0 & \cos(\tau) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$$

4.6 Difficulté relative à l'emploi des angles d'Euler ou de Tait-Byron

Les angles d'Euler (et de Tait-Byron) présentent une difficulté lorsque l'une des rotations élémentaire entraîne l'alignement d'un autre axe sur l'un des axes précédents.

Premier exemple : un tangage de 90° qui fait piquer l'aéronef et aligne son axe x sur l'axe z précédent. Deuxième exemple : un roulis de $+90^\circ$ qui aligne l'axe y sur l'axe z précédent.

Les alignements décrits précédemment sont appelés "blocages de cardan" (*gimbal lock* en anglais) ; ils ne produisent pas un "blocage" au sens strict du terme, mais peuvent provoquer la perte d'un degré de liberté par l'automatisme qui gère les commandes.

On rencontre cette difficulté dans les centrales inertielles qui comportent des cardans comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant.

4.7 Les centrales inertielles et leurs cardans

Une centrale inertielle est un dispositif comprenant une plateforme inertielle qui conserve une orientation fixe malgré les mouvements subis par le mobile sur lequel elle est installée. La figure de la page suivante montre les composants principaux d'une centrale inertielle dotée d'un gyroscope maintenu dans le **cardan vert** ; la toupie du gyroscope – assez massive – tourne à vive allure sous l'action d'un moteur électrique ; le moment cinétique de

la toupie contraint son axe de rotation à conserver la même direction et, dans ces conditions, la surface plane de la toupie représente physiquement la plateforme inertielle.

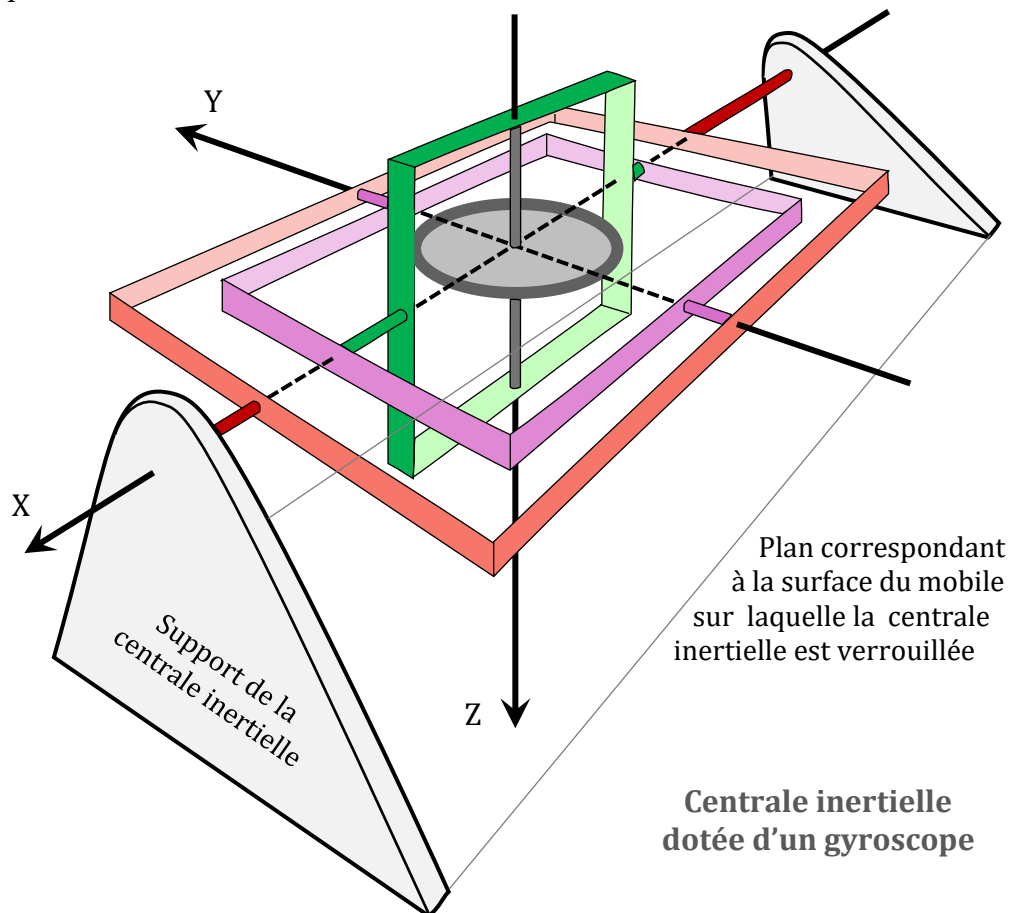
Comme la centrale inertielle est verrouillée sur le mobile par ses supports, elle subit toutes les évolutions de celui-ci.

Si la centrale inertielle tourne autour de son axe Z (axe vertical), le **cardan vert** est entraîné dans cette rotation mais l'axe du gyroscope conserve sa direction, la plateforme inertielle conserve son orientation et aucun effet ne se manifeste sur les cardans.

Si la centrale inertielle tourne autour de son axe X (axe longitudinal), le gyroscope conserve sa direction et axes Y et Z les leurs si bien que les trois cardans ne bougent pas mais qu'un écart angulaire apparaît entre l'**axe du cardan bordeaux** et le support de la centrale verrouillée sur le mobile ; cet écart angulaire – appelé *roulis* – est facilement mesurable.

Si la centrale inertielle tourne autour de son axe Y (axe transversal), le gyroscope conserve sa direction et les axes X et Z les leurs si bien que les trois cardans ne bougent pas mais qu'un écart angulaire apparaît entre l'**axe du cardan violet** et le **cardan bordeaux** ; cet écart angulaire – appelé *tangage* – est facilement mesurable.

En revanche la centrale inertielle représentée sur la figure ne peut en aucun cas détecter les mouvements du mobile autour de l'axe Z ; elle pourrait toutefois être utile pour stabiliser un télépoteur installé sur un navire.

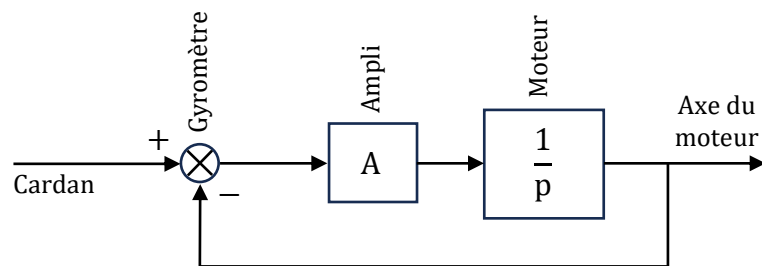


Retenons qu'un gyroscope ne peut détecter que deux mouvements et qu'il faut impérativement un deuxième gyroscope pour détecter un troisième mouvement.

Comme l'usure mécanique des centrales gyroscopiques était prohibitive, un système différent a été inventé : le gyroscope a été remplacé par des gyromètres qui mesurent (en volt) l'écart de vitesse angulaire entre l'axe d'un cardan et le cardan dans lequel il est inséré ; on a ainsi un premier gyromètre entre l'axe vert et le cardan violet ; un second gyromètre entre l'axe violet et le cardan bordeaux ; et un troisième gyromètre entre l'axe bordeaux et le support de la centrale au mobile.

La tension fournie par un gyromètre alimente un moteur électrique qui produit un couple sur l'axe qui lui correspond ; ce couple produit le même effet que le moment cinétique du gyroscope antérieur. Nous avons donc : un premier moteur-couple installé sur le cardan violet pour entraîner l'axe vert ; un second moteur couple installé sur le cardan bordeaux pour entraîner l'axe violet ; un troisième moteur couple installé sur le support pour entraîner l'axe bordeaux. Notez que le moteur et le gyromètre sont ici les deux organes d'un asservissement dans lequel le moteur joue son rôle habituel d'intégration.

Le schéma de principe de cet asservissement est le suivant :

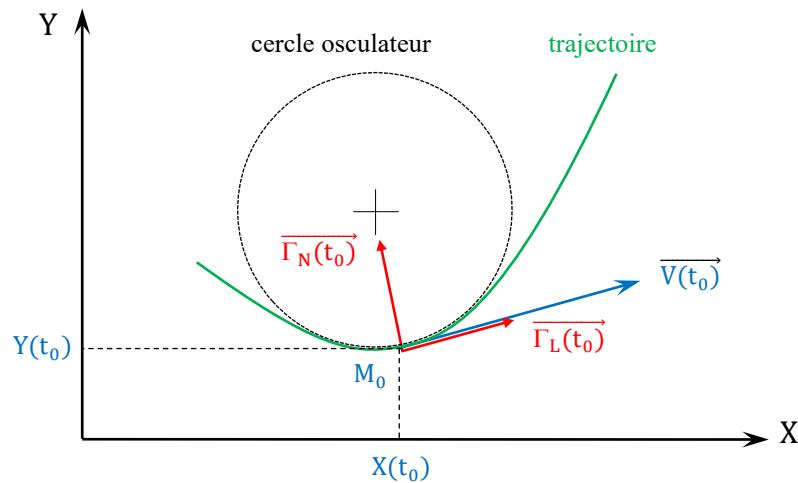


Le but de l'asservissement est d'annuler la vitesse relative mesurée par le gyromètre entre l'axe du moteur et le cardan qui porte cet axe ; la boucle de retour du schéma de principe est exclusivement mécanique ; c'est ainsi que la plateforme inertielle est maintenue dans la direction où elle a été placée avant la mise en fonction la centrale ; cette initialisation de la centrale est impérative.

Tout semble en bon ordre mais une difficulté reste à signaler : cette difficulté appelée "blocage de cardan" survient lorsque les mouvements successifs se soldent par l'alignement d'un axe sur un autre axe ; par exemple si un avion part en piqué vers le sol et qu'il y a confusion entre son axe longitudinal X et l'axe vertical Z . Les centrales inertielle des vols spatiaux ont connu ce type de difficulté. Pour l'éviter il faut ajouter un cardan supplémentaire ou, à défaut, lancer une alerte pour prendre une disposition de sauvegarde avec une procédure préétablie ; encore faut-il que l'alerte fonctionne car la centrale inertielle du vol Apollo 11 a connu une telle difficulté mais l'alerte n'a pas fonctionné !

5. Mouvement d'un mobile dans un plan

Pour cette application imaginons un navire se déplaçant à la surface d'une mer supposée parfaitement plane ; le navire est propulsé à une vitesse $\overrightarrow{V}(t)$ qui peut augmenter sous l'effet d'une accélération longitudinale $\overrightarrow{\Gamma}_L(t)$ (positive) ou négative (décélération) ; si $\Gamma_L(t) = 0$ il n'y a ni accélération ni décélération et le module de la vitesse $\|\overrightarrow{V}(t)\|$ du navire est constante ; par ailleurs, le navire est susceptible de faire varier son cap sous l'effet de l'angle donné à la barre ce qui provoque une accélération transversale $\overrightarrow{\Gamma}_N(t)$ plus ou moins importante vers babord (sens direct) ou vers tribord (sens rétrograde).



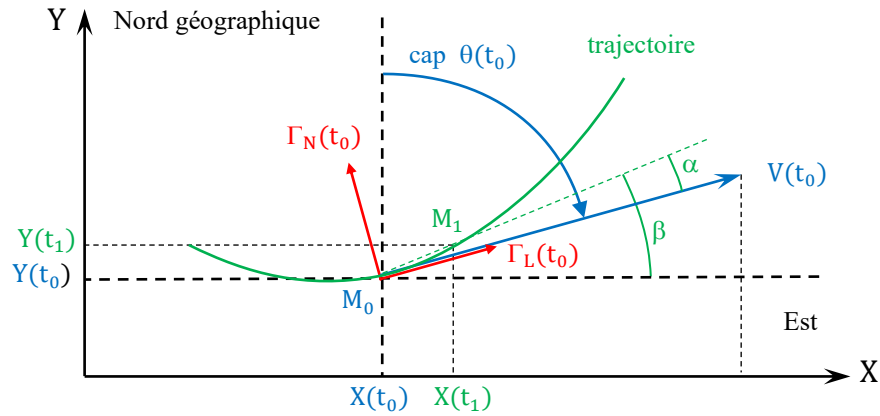
Pour décrire avec exactitude la trajectoire du navire par rapport à un repère de référence fixe (par exemple un repère géographique centré sur un phare) il faudrait écrire les équations dynamiques qui régissent toutes les forces qui s'appliquent à ce navire en fonction de ses caractéristiques techniques et du milieu marin et aérien dans lequel il évolue. Les chantiers navals qui conçoivent les navires disposent de telles simulations. Dans le cas des voiliers soumis à la résistance du milieu marin et à la force du vent, une modélisation dynamique est indispensable ; mais dans le cas d'un navire autopropulsé on peut parfois se contenter d'une modélisation cinématique qui consiste à assimiler le navire au *repère de Serret-Frenet* (en rouge sur la figure à la page précédente) dont l'axe principal à l'instant t_0 est tangent à la trajectoire au point M_0 ; dans ce cas :

- la vitesse et l'accélération longitudinales $\overrightarrow{V}(t_0)$ et $\overrightarrow{\Gamma}_L(t_0)$ sont colinéaires à la tangente au point M_0 .
- si l'accélération normale $\overrightarrow{\Gamma}_N(t_0) = 0$ la trajectoire est rectiligne ; dans le cas contraire $\overrightarrow{\Gamma}_N(t_0)$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{V}(t_0)$ et la trajectoire se courbe pour épouser le *cercle osculateur* (en pointillés sur la figure) dont le rayon $R(t_0)$ est donné par :

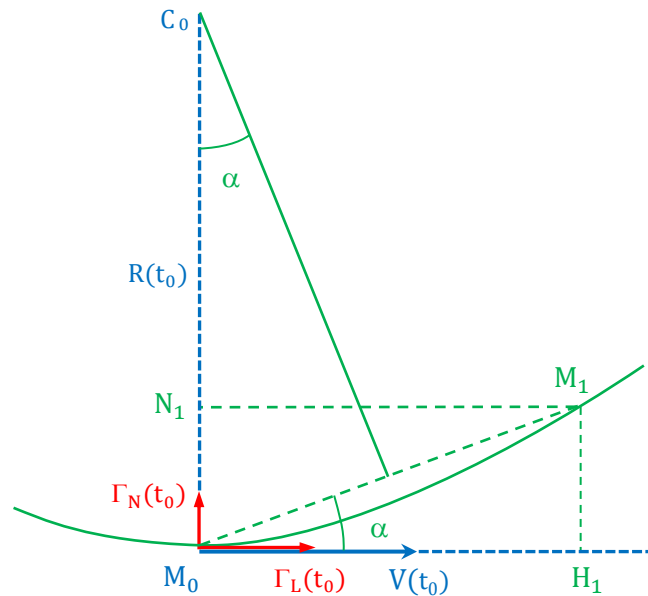
$$R(t_0) = \frac{\|\overrightarrow{V}(t_0)\|^2}{\|\overrightarrow{\Gamma}_N(t_0)\|} \text{ avec } \overrightarrow{\Gamma}_N(t_0) \neq 0$$

A l'instant t_0 nous connaissons les coordonnées géographiques du navire : longitude $X(t_0)$; latitude $Y(t_0)$; nous connaissons également son cap $\theta(t_0)$ et le module $V(t_0)$ de

sa vitesse ; nous connaissons enfin les commandes en accélération longitudinale $\Gamma_L(t_0)$ et transversale $\Gamma_N(t_0)$ qui sont imposées au navire à cet instant. Nous cherchons les relations donnant les coordonnées géographiques du navire $X(t_1)$ et $Y(t_1)$ à l'instant $t_1 = t_0 + T$ où T est appelée *période d'échantillonnage* ; on choisit T assez petite pour que les segments infinitésimaux M_0M_1 successifs représentent convenablement la trajectoire dans ses virages les plus serrés.



Pour bien comprendre la démarche, il faut d'abord raisonner dans le repère de Serret-Frenet en effectuant un zoom grossissant sur la partie qui nous intéresse :



La période d'échantillonnage T étant choisie, nous pouvons calculer M_0H_1 et M_0N_1 par les formules suivantes :

$$M_0H_1 = T \cdot V(t_0) + \frac{T^2}{2} \cdot \Gamma_L(t_0) \quad ; \quad M_0N_1 = \frac{T^2}{2} \cdot \Gamma_N(t_0)$$

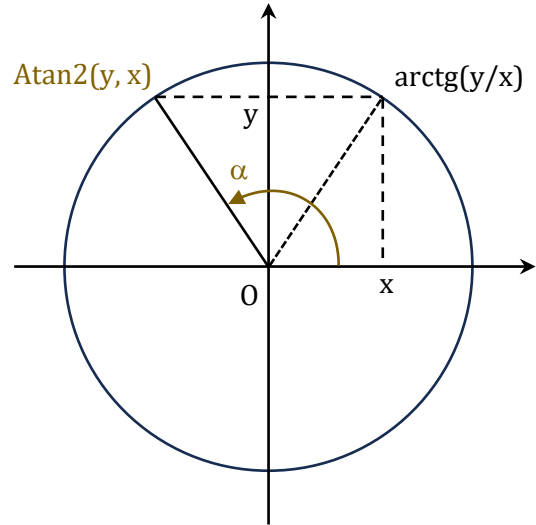
L'angle α est donné par la formule suivante :

$$\alpha = \text{arctg}\left(\frac{M_0 N_1}{M_0 H_1}\right) = \text{arctg}\left[\frac{T \cdot \Gamma_N(t_0)}{2 \cdot V(t_0) + T \cdot \Gamma_L(t_0)}\right]$$

Il faut bien noter ce qui concerne la fonction $\text{arctg}(y/x)$ dont le résultat est compris entre $\pi/2$ et $+\pi/2$, les valeurs extrêmes étant exclues puisque x ne peut pas être nul.

L'emploi de la fonction $\text{arctg}(y/x)$ dans les simulations numériques étant exclue, on utilise la fonction $\theta = \text{Atan2}(y, x)$ qui fournit en radians la valeur de θ comptée de $-\pi$ à $+\pi$ en passant par 0 depuis l'axe des x jusqu'au rayon entre l'origine et le point de coordonnées (x, y) .

(voir aussi page 7)



Nous connaissons $R(t_0)$ qui a été calculé précédemment :

$$R(t_0) = \frac{\|\vec{V}(t_0)\|^2}{\|\vec{\Gamma}_N(t_0)\|} = \frac{[V(t_0)]^2}{\Gamma_N(t_0)}$$

Nous pouvons maintenant calculer le segment $M_0 M_1$: $M_0 M_1 = R(t_0) \cdot \cos(\alpha)$

Connaissant le cap $\theta(t_0)$ du navire, l'inclinaison β du segment $M_0 M_1$ par rapport à l'axe des abscisses du repère géographique est donné par :

$$\beta = \frac{\pi}{2} - [\theta(t_0) - \alpha]$$

l'angle α est connu ; il a été calculé précédemment (formule en haut de la présente page).

On calcule alors $\cos(\beta)$ et $\sin(\beta)$ au moyen des formules trigonométriques classiques :

$$\cos(\beta) = \sin[\theta(t_0) - \alpha] = \sin[\theta(t_0)] \cdot \cos[\alpha] - \cos[\theta(t_0)] \cdot \sin[\alpha]$$

$$\sin(\beta) = \cos[\theta(t_0) - \alpha] = \cos[\theta(t_0)] \cdot \cos[\alpha] + \sin[\theta(t_0)] \cdot \sin[\alpha]$$

en appliquant les formules trigonométriques connues on obtient $\sin(\alpha)$ et $\cos(\alpha)$:

$$\sin(\alpha) = \sin[\text{arctg}(\alpha)] = \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}}$$

$$\cos(\alpha) = \cos[\text{arctg}(\alpha)] = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}}$$

et on remarque que le résultat est ipso facto normalisé.

Les coordonnées géographiques du navire à l'instant t_1 sont alors données par :

$$X(t_1) = X(t_0) + R(t_0) \cdot \cos(\alpha) \cdot [\sin\{\theta(t_0)\} \cdot \cos(\alpha) - \cos\{\theta(t_0)\} \cdot \sin(\alpha)]$$

$$Y(t_1) = Y(t_0) + R(t_0) \cdot \cos(\alpha) \cdot [\cos\{\theta(t_0)\} \cdot \cos(\alpha) + \sin\{\theta(t_0)\} \cdot \sin(\alpha)]$$

Lorsqu'on élabore une simulation numérique, il est d'usage de calculer la position géographique à l'échantillon $k+1$ connaissant la position à l'échantillon k précédent ; pour le mouvement qui nous concerne cela s'écrit de la manière suivante :

$$X_{k+1} = X_k + R_k \cdot \cos(\alpha_k) \cdot [\sin(\theta_k) \cdot \cos(\alpha_k) - \cos(\theta_k) \cdot \sin(\alpha_k)]$$

$$Y_{k+1} = Y_k + R_k \cdot \cos(\alpha_k) \cdot [\cos(\theta_k) \cdot \cos(\alpha_k) + \sin(\theta_k) \cdot \sin(\alpha_k)]$$

Enfin, il est nécessaire de déterminer les *conditions initiales* pour k_0 ; les voici récapitulées :

- *point de départ* : X_0 et Y_0 ;
- *cap et vitesse* du mobile au départ : θ_0 et V_0 ;
- *commandes en accélération longitudinale et transversale* imposées au mobile au départ : $\Gamma_{L,0}$ et $\Gamma_{N,0}$.

Nota 1 : la période d'échantillonnage T a été fixée préalablement et elle ne doit pas changer durant la simulation.

Nota 2 : les commandes en accélération longitudinale et transversale imposées au mobile doivent être modifiées à chaque fois que l'une et/ou l'autre change par rapport à l'itération précédente.

6. Mouvement d'un mobile dans l'espace à trois dimensions

6.1 Position du problème

On suppose que le mobile se déplace dans le repère géographique absolu $(O ; X, Y, Z)$ et c'est donc dans ce repère que le modèle doit être élaboré.

Un mobile "abstrait" peut être défini par le trièdre de Serret-Frenet $(M ; \vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ qui se déplace dans le repère géographique absolu $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sous l'effet des commandes suivantes qui constituent les quatre *degrés de liberté* de ce dispositif (voir la figure sur la page suivante).

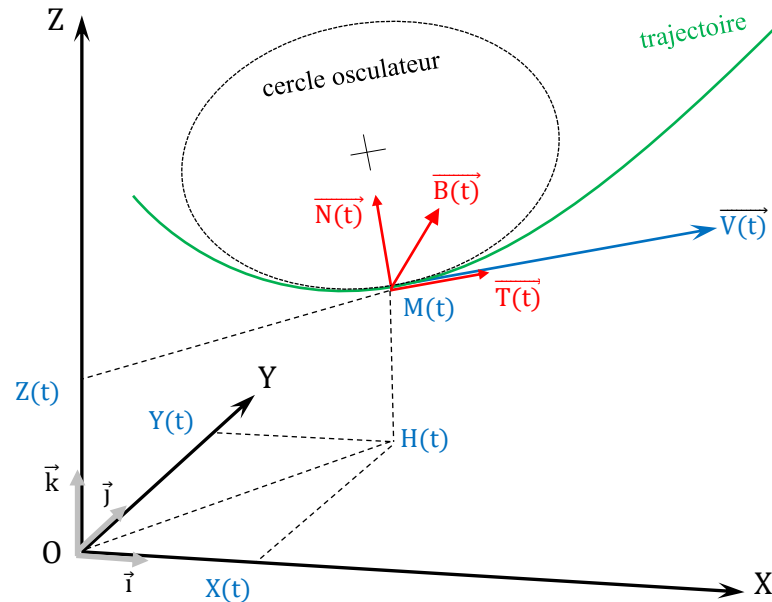
Ces commandes s'expriment en fonction du temps t dans le trièdre mobile $(M ; \vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$:

- accélération longitudinale $\gamma(t)$ selon l'axe \vec{T} ;
- vitesse de rotation conjointe des axes \vec{N} et \vec{B} autour de l'axe \vec{T} (*roulis*) qui n'a aucun effet différentiel direct sur la trajectoire ;
- accélération transversale $\vec{\Gamma}_N$ (colinéaire à \vec{N}) autour de l'axe \vec{B} qui induit un effet différentiel immédiat et conjoint sur les axes \vec{N} et \vec{T} et provoque ainsi une courbure λ de la trajectoire (*lacet*) dans le plan (M, \vec{T}, \vec{N}) ;
- accélération transversale $\vec{\Gamma}_B$ (colinéaire à \vec{B}) autour de l'axe \vec{N} qui induit un effet différentiel immédiat et conjoint sur les axes \vec{B} et \vec{T} et provoque ainsi une courbure τ de la trajectoire (*tangage*) dans le plan (M, \vec{T}, \vec{B}) .

Une accélération transversale s'exprime en $m \cdot s^{-2}$ et la courbure qui en résulte en m^{-1} .

Notez que l'effet différentiel est immédiat et ne porte que sur la portion infinitésimale de la trajectoire qui suit l'instant t considéré, eu égard aux commandes présentes à cet instant-là. Sous l'effet de ces commandes, l'origine M du trièdre mobile parcourt une trajectoire

représentée par la courbe C qui n'est pas forcément plane.



A l'instant t le mobile est au point $M(t)$.

Les plans $[M(t) ; \overrightarrow{T(t)}, \overrightarrow{B(t)}]$ et $[M(t) ; \overrightarrow{T(t)}, \overrightarrow{N(t)}]$ sont appelés respectivement *plan osculateur en lacet* et *plan osculateur en tangage* parce que la trajectoire à proximité de $M(t)$ est tangente à ces plans.

On peut dès à présent formuler les remarques suivantes :

- la vitesse et l'accélération longitudinales $\overrightarrow{V(t)}$ et $\overrightarrow{\Gamma_L(t)}$ sont colinéaires sur la tangente au point $M(t)$ et elles sont évidemment contenues dans le(s) plan(s) osculateur(s) lorsque qu'il y a une (des) accélération(s) transversale(s) ;
- si les accélérations transversales $\overrightarrow{\Gamma_N(t)}$ et $\overrightarrow{\Gamma_B(t)}$ sont toutes les deux nulles, la trajectoire est rectiligne et la notion de plan osculateur n'a plus de raison d'être.

Nota

Reste à considérer la commande en roulis qui fait tourner le mobile autour de son axe longitudinal \overrightarrow{T} et modifie donc son attitude sur la trajectoire ; deux cas doivent être pris en considération :

- si le modèle cinématique est élaboré pour examiner l'effet des commandes du mobile sur sa trajectoire, il faut tenir compte du roulis qui provoque une rotation de \overrightarrow{N} et \overrightarrow{B} autour de \overrightarrow{T} puisque cela est susceptible de modifier par la suite l'effet des commandes transversales et, par voie de conséquence, la trajectoire elle-même ; ce modèle doit donc disposer de ses *quatre degrés de liberté*.
- si le modèle cinématique est élaboré pour exploiter les mesures de position – et éventuellement de vitesse radiale – réalisées par des capteurs sur une cible réelle en vue de déterminer sa trajectoire, le modèle cinématique peut exclure le roulis dont il n'a pas besoin puisqu'il est indétectable par les capteurs ; ce modèle de trajectographie ne dispose alors que de *trois degrés de liberté*.

6.2 Effet direct du roulis sur le trièdre de Serret-Frenet

Le roulis est l'angle ϕ de rotation – dans le sens direct ou dans le sens rétrograde – du trièdre mobile autour de son axe principal x ; pour des considérations exclusivement dynamiques un pilote d'aéronef provoque souvent la rotation en roulis avant une commande en lacet. Pour exprimer cette rotation on utilise la matrice R_ϕ dont l'expression homogène a été donnée dans le paragraphe donnant les conditions pour qu'un quaternion unitaire représente une rotation (voir page 6) :

$$R_\phi = \begin{bmatrix} r^2 + u^2 - v^2 - w^2 & 2 \cdot (u \cdot v - r \cdot w) & 2 \cdot (u \cdot w + r \cdot v) \\ 2 \cdot (u \cdot v + r \cdot w) & r^2 + v^2 - u^2 - w^2 & 2 \cdot (v \cdot w - r \cdot u) \\ 2 \cdot (u \cdot w - r \cdot v) & 2 \cdot (v \cdot w + r \cdot u) & r^2 + w^2 - u^2 - v^2 \end{bmatrix}$$

où : $r = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)$; $u = \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)$; $v = 0$; $w = 0$

ce qui donne :

$$R_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) & -2 \cdot \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ 0 & 2 \cdot \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) & \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \end{bmatrix}$$

Or :

$$\cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) = \cos(\phi) \quad \text{et} \quad 2 \cdot \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) = \sin(\phi)$$

On obtient donc :

$$R_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

Ce résultat n'a rien d'étonnant si on le compare à celui qui a été obtenu dans un plan (voir page 11, paragraphe 4.2, alinéa 3). La matrice R_ϕ opère une rotation d'angle ϕ du trièdre x, y, z vers le trièdre x', y', z' de sorte que :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Dans le cas où le mobile est commandé en vitesse angulaire de roulis $d\phi/dt = r$ où r est une constante – positive dans le sens direct ou négative dans le sens rétrograde – exprimée en radians par seconde, on a :

$$\phi(t_2) = \phi(t_1) + r \cdot (t_2 - t_1)$$

Lorsqu'on élabore une simulation numérique, il convient de calculer d'abord l'angle de rotation à l'échantillon $k+1$ connaissant l'angle de rotation à l'échantillon k précédent ; sachant que T est la période d'échantillonnage, on a alors :

$$\phi_{k+1} = \phi_k + r \cdot T$$

dont on calcule le sinus et le cosinus pour les entrer dans la matrice de rotation R_ϕ .

6.3 Effet différentiel subi par l'orientation du trièdre de Serret-Frenet

Le trièdre de Serret-Frenet $(M; \vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ est soumis à un effet différentiel associé aux courbures de la trajectoire :

- la courbure $\lambda(t)$ correspond à une rotation de \vec{T} autour de l'axe \vec{B} (lacet) provoquée par une commande en accélération $\Gamma_N(t) = \lambda(t) \cdot V^2(t)$;
- la courbure $\tau(t)$ correspond à une rotation de \vec{B} autour de l'axe \vec{N} (tangage) provoquée par une commande en accélération $\Gamma_B(t) = \tau(t) \cdot V^2(t)$.

Cet effet différentiel s'exprime dans le trièdre de Serret-Frenet par la relation différentielle suivante où s représente l'abscisse curviligne de $M(t)$ sur sa trajectoire :

$$\frac{d}{ds} \begin{vmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{vmatrix}$$

On note que la vitesse de rotation $\phi(t)$ et l'accélération longitudinale $\gamma(t)$ et ne sont pas concernées puisque l'effet différentiel est exprimé dans le repère de Serret-Frenet lui-même ; la vitesse de rotation $\phi(t)$ a été prise en compte dans le paragraphe 6.2 qui précède ; l'accélération longitudinale $\gamma(t)$ sera prise en compte dans le paragraphe 6.4 qui suit.

Tous les éléments de cette matrice sont connus :

- les trois termes diagonaux sont nuls, cela va de soi ;
- deux autres termes sont également nuls puisque la portion infinitésimale de la trajectoire qui traverse le plan formé par les vecteurs unitaires \vec{N} et \vec{B} est impérativement orthogonale à ce plan ;
- les termes restants résultent de la courbure λ (dont l'effet différentiel se manifeste sur \vec{N} et sur \vec{T}) et de la courbure τ (dont l'effet différentiel se manifeste sur \vec{N} et sur \vec{B}).

On veut maintenant représenter l'effet différentiel global en utilisant le quaternion suivant : $q = r + u \cdot i + v \cdot j + w \cdot k$

L'évolution dans le temps de ce quaternion a été étudiée au paragraphe 3.2 (voir la rubrique *Évolution temporelle d'un quaternion*, page 8) : elle se traduit par la relations suivante :

$$\frac{d}{dt} \begin{vmatrix} r(t) \\ u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -a & -b & -c \\ a & 0 & -c & b \\ b & c & 0 & -a \\ c & -b & a & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} r(t) \\ u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{vmatrix}$$

dans laquelle on doit avoir :

$$a = \frac{d\vec{N}}{dt} \cdot \vec{B} = -\tau \cdot V(t) ; \quad b = \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot \vec{T} = 0 ; \quad c = \frac{d\vec{T}}{dt} \cdot \vec{N} = \lambda \cdot V(t)$$

Noter le signe “moins” devant τ qui indique le *sens rétrograde du mouvement de tangage* volontairement choisi pour le trièdre de Serret Frenet.

On obtient alors l'expression du quaternion qui traduit l'effet différentiel subi par le trièdre de Serret-Frenet, exprimé dans ce même trièdre :

$$\frac{d}{dt} \begin{vmatrix} r(t) \\ u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{vmatrix} = \frac{V(t)}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & \tau & 0 & -\lambda \\ -\tau & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \tau \\ \lambda & 0 & -\tau & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} r(t) \\ u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{vmatrix}$$

6.4 Effet subi par l'origine du trièdre de Serret-Frenet

L'origine M du trièdre de Serret-Frenet subit un déplacement infinitésimal ds sous l'effet de la commande en accélération longitudinale γ qui produit la vitesse longitudinale $V(t)$ qui est la vitesse d'entraînement du trièdre de Serret-Frenet sur sa trajectoire (puisque la vitesse relative de M dans le trièdre de Serret-Frenet est nulle par définition) ; la vitesse d'entraînement est donnée par la relation vectorielle suivante :

$$\frac{d\overrightarrow{M(t)}}{ds} = \overrightarrow{T(t)}$$

Sachant que $ds = V(t) \cdot dt$ on obtient immédiatement :

$$\frac{d\overrightarrow{M(t)}}{dt} = V(t) \cdot \overrightarrow{T(t)}$$

et, en remplaçant le vecteur principal du trièdre de Serret-Frenet par ses composantes dans le trièdre fixe calculées au paragraphe 4.3 (alinéa 4) ; voir page 14) on obtient :

$$\frac{d}{dt} \begin{vmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{vmatrix} = V(t) \cdot \begin{vmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (r^2 + u^2 - v^2 - w^2) \cdot V(t) \\ 2 \cdot (u \cdot v + r \cdot w) \cdot V(t) \\ 2 \cdot (u \cdot w - r \cdot v) \cdot V(t) \end{vmatrix}$$

6.5 Bilan

Avec les quaternions, le système différentiel comporte *huit relations* : *trois relations* pour restituer la position de M dans le trièdre fixe (voir paragraphe 6.4 précédent) ; *quatre relations* pour entretenir les quaternions qui prennent en charge l'effet différentiel des commandes transversales sur le trièdre de Serret-Frenet (voir paragraphe 6.3 précédent) ; *une relation* pour restituer la vitesse à partir de la commande en accélération longitudinale.

$$\frac{d}{dt} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ r \\ u \\ v \\ w \\ V(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (r^2 + u^2 - v^2 - w^2) \cdot V(t) \\ 2 \cdot (u \cdot v + r \cdot w) \cdot V(t) \\ 2 \cdot (u \cdot w - r \cdot v) \cdot V(t) \\ \frac{1}{2} \cdot (+u \cdot \tau - w \cdot \lambda) \cdot V(t) \\ \frac{1}{2} \cdot (-w \cdot \tau + v \cdot \lambda) \cdot V(t) \\ \frac{1}{2} \cdot (-u \cdot \lambda - w \cdot \tau) \cdot V(t) \\ \frac{1}{2} \cdot (+w \cdot \lambda + v \cdot \tau) \cdot V(t) \\ \gamma \end{vmatrix}$$

La commande en roulis n'est pas prise en compte dans ce système différentiel (un degré de liberté a donc été perdu (voir le Nota page 24).

6.6 Équation d'état

Il convient maintenant de discrétiser le système différentiel précédent pour écrire sept relations donnant l'état du système à l'instant $k+1$ connaissant l'état du système et les commandes à l'état k ainsi que la période d'échantillonnage T qui a été retenue pour la discrétisation.

$$\begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{c} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \\ \Gamma_{k+1} \\ \mathbf{u}_{k+1} \\ \mathbf{v}_{k+1} \\ \mathbf{w}_{k+1} \\ V_{k+1} \end{array} \right| = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{c} x_k \\ y_k \\ z_k \\ \Gamma_k \\ \mathbf{u}_k \\ \mathbf{v}_k \\ \mathbf{w}_k \\ V_k \end{array} \right| + \begin{array}{c} \left| \begin{array}{c} (r_k^2 + \mathbf{u}_k^2 - \mathbf{v}_k^2 - \mathbf{w}_k^2) \cdot V_k \cdot T \\ 2 \cdot (\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{v}_k + r_k \cdot \mathbf{w}_k) \cdot V_k \cdot T \\ 2 \cdot (\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{w}_k - r_k \cdot \mathbf{v}_k) \cdot V_k \cdot T \\ \frac{1}{2} \cdot (+ \mathbf{u}_k \cdot \boldsymbol{\tau}_k - \mathbf{w}_k \cdot \boldsymbol{\lambda}_k) \cdot V_k \cdot T \\ \frac{1}{2} \cdot (- r_k \cdot \boldsymbol{\tau}_k + \mathbf{v}_k \cdot \boldsymbol{\lambda}_k) \cdot V_k \cdot T \\ \frac{1}{2} \cdot (- \mathbf{w}_k \cdot \boldsymbol{\tau}_k - \mathbf{u}_k \cdot \boldsymbol{\lambda}_k) \cdot V_k \cdot T \\ \frac{1}{2} \cdot (+ \mathbf{v}_k \cdot \boldsymbol{\tau}_k + r_k \cdot \boldsymbol{\lambda}_k) \cdot V_k \cdot T \\ \boldsymbol{\gamma}_k \cdot T \end{array} \right|
 \end{array}
 \end{array}$$

La période d'échantillonnage T doit être choisie assez petite pour que les déplacements infinitésimaux du mobile entre deux itérations puissent être assimilés à des segments de droite eu égard aux commandes en accélération auxquelles le mobile est susceptible d'être soumis :

- accélération longitudinale $\boldsymbol{\gamma}_k$;
- accélération transversale $\Gamma_N(t) = \boldsymbol{\lambda}(t) \cdot V^2(t)$ qui provoque la courbure en lacet $\boldsymbol{\lambda}_k$;
- accélération transversale $\Gamma_B(t) = \boldsymbol{\tau}(t) \cdot V^2(t)$ qui provoque la courbure en tangage $\boldsymbol{\tau}_k$;

Enfin, il est nécessaire de déterminer les *conditions initiales* pour k_0 :

- *point de départ* : x_0 , y_0 et z_0 ;
- *vitesse* du mobile au départ : V_0 ;
- *quaternions* au départ : $r_0 = -1$; $\mathbf{u}_0 = \mathbf{v}_0 = \mathbf{w}_0 = 0$; dans ces conditions, le repère de Serret-Frenet a son axe z tourné vers le haut ; la valeur initiale des quaternions qui est ici proposée aligne l'axe longitudinal du mobile sur l'axe OX du repère fixe mais on peut bien sûr choisir un cap de départ différent.

Il est aussi possible d'imposer des commandes valables dès la première itération :

- accélération longitudinale $\boldsymbol{\gamma}_{k,0}$;
- accélération transversale $\Gamma_{N,0} = \boldsymbol{\lambda}_0 \cdot V_0^2$;
- accélération transversale $\Gamma_{B,0} = \boldsymbol{\tau}_0 \cdot V_0^2$.

Et à chaque itération il est *impératif* de normaliser le quaternion ; cela consiste à calculer sa norme et à diviser les termes du quaternion par la norme qui vient d'être calculée.

Nota 1 : la période d'échantillonnage T a été fixée préalablement et elle ne doit pas changer durant la mise en œuvre du modèle.

Nota 2 : les commandes en accélération longitudinale et transversale imposées au mobile doivent être modifiées à chaque fois que l'une et/ou l'autre change par rapport à l'itération précédente.

6.7 Simulation

Une simulation est proposée sur les deux fichiers Excel joints : SimulMobile (protégé).xls et SimulMobile (modifiable).xls

Celui qui est *protégé* propose des essais modifiant les commandes dont l'effet est suffisamment explicites (grâce à leur mise en couleur).

Avec celui qui est *modifiable*, le lecteur peut effectuer ses propres essais en modifiant les initialisations et les commandes selon ses souhaits.

6.8 Utilisations de l'équation d'état

L'équation d'état précédente peut être exploitée numériquement pour réaliser un algorithme de *filtrage de Kalman* destiné à la trajectographie des cibles aériennes manœuvrantes ; il peut aussi être utilisé pour effectuer le *contrôle optimal* d'un mobile aérien en lacet et en tangage seulement (mais pas en roulis). Ces deux possibilités sortent du cadre fixé pour le présent fascicule mais le lecteur intéressé peut consulter le manuel d'*Automatique* mis à sa disposition sur le site <https://www.Tradere-doc.fr> à la rubrique Science : dans ce manuel, le chapitre VI est consacré au *filtrage de Kalman* et le chapitre VII au *contrôle optimal*.